## Cvičení 1 – MAI 2 – užití derivace funkce

1. Ukažte, že platí nerovnosti:

   a) $e^x \geqq 1+x$ pro všechna $x \in R$;

   b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pro všechna $x > 0$;

   c) $\log x \leqq x-1$ pro všechna $x > 0$;

   d) $x - \frac{x^2}{2} < \log(x+1) < x$ pro všechna $x > 0$.

2. Ukažte, že platí (a interpretujte geometricky):

   Je-li $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$) v $(a,b)$, pak pro lib. $x_0 \in (a,b)$ a všechna $x \in (a,b)$ je

   $$f(x) \geqq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

   $$\Big( (\text{resp.}) \quad f(x) \leqq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Big).$$

   (Odtud snadno ukážete platnost nerovností jako $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0$, $\log(1+x) \leq x$ pro $x > -1$ apod.)

3. Ukažte, že platí:

   a) $|\sin x - \sin y| \leqq |x-y|$ pro všechna $x, y \in R$;

   b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqq |x-y|$ pro všechna $x, y \in R$.

   Umíte tvrzení a, b) zobecnit?

4. Spočítejte:

   a) $$\lim_{x \to +\infty} \left( e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \right)$$

   b) $$\lim_{x \to +\infty} \left( \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} \right)$$

5. Je-li $f'(x) = g'(x)$ pro $x \in (a,b)$, co lze říci o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ (na intervalu $(a,b)$) ?

6. Několik příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:

a) Na grafu funkce $y = x^2$ najděte bod nejbližší bodu $A[6,3]$.

b) Najděte válec daného objemu s minimálním povrchem.

c) Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru musíme vystřihnout, abychom složili krabičku (bez víka) maximálního objemu?

d) V rovině je dán bod $A[a,b]$, $a>0, b>0$. Kdy bude mít pravoúhlý trojúhelník $OPQ$ ($O$ – počátek s.s., $P$ leží na ose $x$, $Q$ leží na ose $y$, $A$ je bod přepony $PQ$) nejmenší obsah?

e) Z chodby o šířce $A$ kolmo odbočuje chodba o šířce $B$. S jak dlouhou tyčí (zanedbatelného průřezu, nesenou vodorovně) je možné zahnout?

f) Kapka s počáteční hmotností $m_0$ padá volným pádem (z dostatečné výšky) a přitom se vypařuje – hmotnost kapky v čase $t$ je dána vztahem $m(t) = m_0 - kt$, $(k>0)$. Kdy bude mít kapka největší kinetickou energii?

7. Taylorův polynom.

a) Napište Taylorův polynom stupně $n$ $(\geq 3)$ pro funkce $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^a$

b) Napište Taylorův polynom v nule

(i) stupně $n=2$ pro funkce

$$f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}\,,\ a>0\ ; \quad f(x) = \sqrt{1+3e^{-x}}\ ;$$

(ii) stupně $n=3$ pro funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x\ ; \quad f(x) = \log(\cos x)\ .$$

c) Užitím Taylorova polynomu spočtěte limity:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ ; (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ ;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ ; (iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left( x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

d) Odhadněte chybu v následujících aproximacích

(i) $e^x \doteq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$ pro $0 \leq x \leq 1$ ;

(ii) $\sin x \doteq x - \dfrac{x^3}{6}$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$ ;

(iii) $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{8}$ pro $0<x<1$ .

e) S pomocí Taylorova polynomu spočtěte přibližně:
(pokuste se odhadnout chybu)

a) $\sqrt{0{,}98}$ ; $\sqrt{2}$ ; $\sqrt[3]{30}$ ; $\operatorname{arctg} 0{,}8$ apod ;

b) Je-li $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, spočtěte přibližně $f(1{,}03)$, $f(1{,}001)$.